

1.8 ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ–ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗΝ ΓΩΝΙΕΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Παραπληρωματικές γωνίες : Είναι ο γωνίες που έχουν άθροισμα 180°
Κάθε μία λέγεται παραπλήρωμα της άλλης

2.

Συμπληρωματικές γωνίες : Είναι ο γωνίες που έχουν άθροισμα 90°
Κάθε μία λέγεται συμπλήρωμα της άλλης

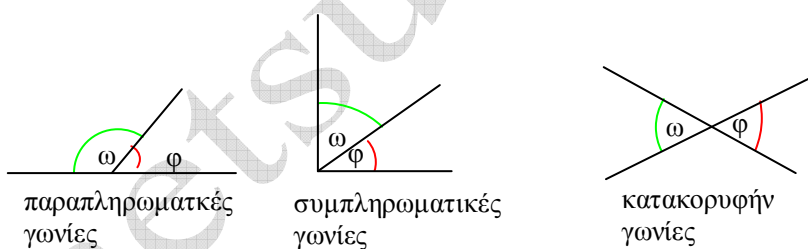
3.

Κατακορυφήν γωνίες : Είναι ο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μίας είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της άλλης.

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Οι παραπάνω γωνίες σε σχήματα :



2.

Πρόταση : Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δύο γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\phi}$ είναι παραπληρωματικές μιας γωνίας $\hat{\sigma}$. Δικαιολογήστε γιατί $\hat{\omega} = \hat{\phi}$. Ισχύει το ίδιο αν είναι συμπληρωματικές της $\hat{\sigma}$;

Προτεινόμενη λύση

$$\hat{\omega} + \hat{\sigma} = 180^\circ \text{ και } \hat{\phi} + \hat{\sigma} = 180^\circ \text{ άρα } \hat{\omega} + \hat{\sigma} = \hat{\phi} + \hat{\sigma}$$

$$\hat{\omega} = \hat{\phi}$$

Θεωρία 1-2

Ομοίως για την περίπτωση των συμπληρωματικών

2.

Συμπληρώστε τον πίνακα

$\hat{\omega}$	Συμπληρωματική της $\hat{\omega}$	Παραπληρωματική της $\hat{\omega}$
8°	82°	172°
90°	0°	90°
130°	Δεν υπάρχει	50°

Θεωρία 1-2

Προτεινόμενη λύση

Φαίνεται παραπάνω

3.

Να σχεδιάσεις δύο εφεξής παραπληρωματικές γωνίες που η μία να είναι 65°
Πόσες μοίρες είναι η δεύτερη γωνία;

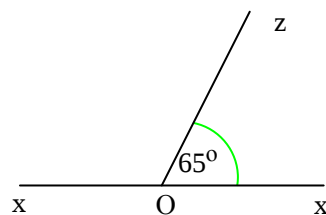
Προτεινόμενη λύση

Σχεδιάζουμε μία ευθεία xx' και επιλέγουμε
ένα σημείο της O .

Με κορυφή το O και πλευρά την Ox'

κατασκευάζουμε γωνία $x'Oz = 65^\circ$

Τότε η γωνία $x'Oz$ είναι η άλλη από τις ζητούμενες γωνίες και το μέτρο της είναι
 $x'Oz = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$



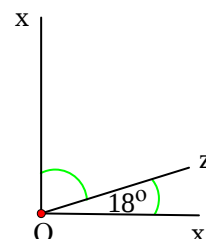
4.

Να σχεδιάσεις δύο εφεξής συμπληρωματικές γωνίες που η μία να είναι 18°
Πόσες μοίρες είναι η δεύτερη γωνία;

Προτεινόμενη λύση

Σχεδιάζουμε μια ορθή γωνία xOx' . Στο εσωτερικό της
κατασκευάζουμε γωνία $x'Oz = 18^\circ$

Τότε η γωνία $x'Oz$ είναι η άλλη από τις ζητούμενες γωνίες
και το μέτρο της είναι $x'Oz = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$



5.

Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{\phi}$, $\hat{\sigma}$ και $\hat{x}$ του διπλανού σχήματος.

Προτεινόμενη λύση

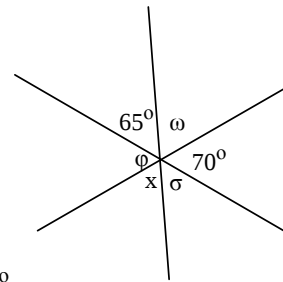
$$65^\circ + \hat{\omega} + 70^\circ = 180^\circ \quad \text{άρα} \quad 135^\circ + \hat{\omega} = 180^\circ$$

$$\hat{\omega} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

Η $\hat{x}$ είναι κατακορυφήν της $\hat{\omega}$ άρα $\hat{x} = \hat{\omega} = 45^\circ$

Η $\hat{\phi}$ είναι κατακορυφήν της γωνίας των 70° άρα $\hat{\phi} = 70^\circ$

Η $\hat{\sigma}$ είναι κατακορυφήν της γωνίας των 65° άρα $\hat{\sigma} = 70^\circ$



6.

Στο διπλανό σχήμα η ΟΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta \hat{O} B$. Να υπολογίσετε κάθε μία από τις γωνίες $\Delta \hat{O} \Gamma$ και $\Gamma \hat{O} B$.

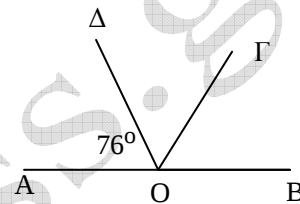
Προτεινόμενη λύση

$$\Delta \hat{O} \Delta + \Delta \hat{O} B = 180^\circ \quad \text{άρα} \quad 76^\circ + \Delta \hat{O} B = 180^\circ$$

$$\Delta \hat{O} B = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$$

Επειδή ΟΓ διχοτόμος της $\Delta \hat{O} B$, θα είναι $\Delta \hat{O} \Gamma = \Gamma \hat{O} B =$

$$= \frac{1}{2} \Delta \hat{O} B = \frac{1}{2} \cdot 104 = 52^\circ$$



7.

Στο διπλανό σχήμα οι ημιευθείες Οx και Οy είναι κάθετες. Επίσης $x \hat{O} z = 40^\circ$ και οι Οδ, Οδ' είναι διχοτόμοι των γωνιών $x \hat{O} z$ και $z \hat{O} y$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την γωνία $\delta \hat{O} \delta'$

Προτεινόμενη λύση

Αφού $Ox \perp Oy$, είναι $x \hat{O} y = 90^\circ$ άρα

$$x \hat{O} z + z \hat{O} y = 90^\circ$$

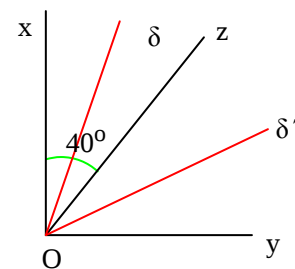
$$40^\circ + z \hat{O} y = 90^\circ$$

$$z \hat{O} y = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

Η Οδ είναι διχοτόμος της $x \hat{O} z$, άρα $\delta \hat{O} z = x \hat{O} \delta = 20^\circ$

Η Οδ' είναι διχοτόμος της $y \hat{O} z$, άρα $\delta' \hat{O} z = y \hat{O} \delta' = 25^\circ$

Οπότε $\delta \hat{O} \delta' = \delta \hat{O} z + \delta' \hat{O} z = 20^\circ + 25^\circ = 45^\circ$



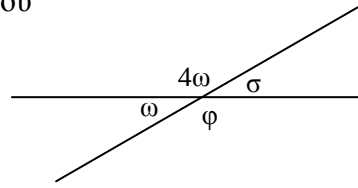
8.

Στο διπλανό σχήμα, να υπολογίσετε όλες τις γωνίες του

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}\hat{\omega} + 4\hat{\omega} &= 180^\circ \quad \text{οπότε} \quad 5\hat{\omega} = 180^\circ \\ \hat{\omega} &= 36^\circ \\ 4\hat{\omega} &= 144^\circ,\end{aligned}$$

$\hat{\phi} = 144^\circ$ ως κατακορυφήν της $4\hat{\omega}$ και $\hat{\sigma} = 36^\circ$ ως κατακορυφήν της $\hat{\omega}$

**9.**

α) Δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές και η μία είναι τριπλάσια της άλλης.

Να υπολογίσετε τις γωνίες.

β) Δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές και η μία είναι τετραπλάσια της άλλης.

Να υπολογίσετε τις γωνίες.

Προτεινόμενη λύση

α)

Αν $\hat{\omega}$ είναι η μικρότερη γωνία, τότε η άλλη είναι $3\hat{\omega}$

Όμως $\hat{\omega} + 3\hat{\omega} = 90^\circ$ άρα $4\hat{\omega} = 90$ συνεπώς $\hat{\omega} = 22,5^\circ$

Οπότε η μεγαλύτερη γωνία είναι $3 \cdot 22,5 = 67,5^\circ$

β)

Ομοίως $\hat{\omega} + 4\hat{\omega} = 180^\circ$ άρα $\hat{\omega} = 36^\circ$ και η μεγαλύτερη γωνία είναι 144°

10.

Σχεδιάστε μία γωνία ίση με 100° και την κατακορυφήν της. Να φέρετε τις διχοτόμους των δυο αυτών γωνιών και να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν οι διχοτόμοι.

Προτεινόμενη λύση

Με τον γνωστό τρόπο σχεδιάζουμε γωνία

$\angle AOB = 100^\circ$ και στην συνέχεια σχεδιάζουμε

τις αντικείμενες ημιευθείες OA' και OB'

των OA και OB αντίστοιχα.

Η γωνία $\angle A'OB'$ είναι η κατακορυφήν της $\angle AOB$

και επομένως $\angle A'OB' = 100^\circ$.

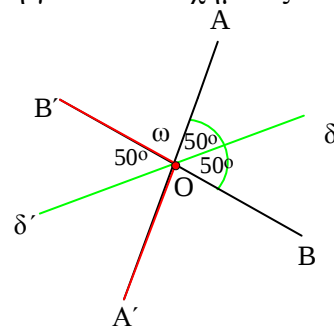
Αν Od και Od' είναι οι διχοτόμοι των γωνιών αυτών, τότε $\angle AOd = 50^\circ = \angle B'Od'$

Ισχύει ότι $\hat{\omega} + \angle AOB = 180^\circ$ δηλαδή $\hat{\omega} + 50^\circ + 50^\circ = 180^\circ$

$$\hat{\omega} + \angle AOd + \angle B'Od' = 180^\circ$$

$$\angle Od\delta' = 180^\circ$$

Πράγμα που σημαίνει ότι οι διχοτόμοι των κατακορυφών γωνιών είναι αντικείμενες ημιευθείες



11.

Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$. Να βρείτε τις άγνωστες γωνίες.

Προτεινόμενη λύση

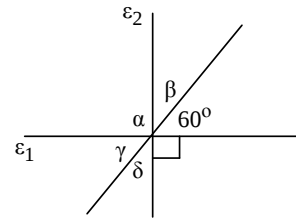
$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2, \text{ άρα } \hat{\alpha} = 90^\circ$$

$$\hat{\beta} + 60^\circ = 90^\circ \text{ άρα } \hat{\beta} = 30^\circ$$

$$\hat{\gamma} = 60^\circ \text{ ως κατακορυφήν της γωνίας των } 60^\circ$$

$$\hat{\delta} = 30^\circ \text{ ως κατακορυφήν της } \hat{\beta}.$$

Τέλος η άλλη γωνία που απομένει είναι 90°

**12.**

Να σχεδιάσετε δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες. Να φέρετε τις διχοτόμους αυτών και να υπολογίσετε την γωνία των διχοτόμων.

Να αντιμετωπίσετε το ίδιο πρόβλημα αν οι γωνίες είναι εφεξής συμπληρωματικές

Προτεινόμενη λύση

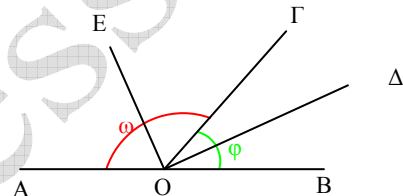
Έστω $\hat{\omega}$ και $\hat{\phi}$ οι δύο εφεξής παραπληρωματικές γωνίες, και OE, OD οι διχοτόμοι αυτών

$$\text{Έχουμε } \hat{\omega} + \hat{\phi} = 180^\circ \quad (1)$$

$$\hat{A\hat{O}E} = \hat{E\hat{O}\Gamma} = \frac{\hat{\omega}}{2}, \quad \hat{\Gamma\hat{O}\Delta} = \hat{\Delta\hat{O}B} = \frac{\hat{\phi}}{2} \quad (2)$$

$$\hat{E\hat{O}\Delta} = \hat{E\hat{O}\Gamma} + \hat{\Gamma\hat{O}\Delta} \stackrel{(2)}{=} \frac{\hat{\omega}}{2} + \frac{\hat{\phi}}{2} = \frac{\hat{\omega} + \hat{\phi}}{2} \stackrel{(1)}{=} \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Αν οι γωνίες είναι συμπληρωματικές, με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι η γωνία των διχοτόμων τους είναι 45°

**13.**

Μια γωνία $\hat{\omega}$ μετρήθηκε με ακρίβεια και βρέθηκε ότι είναι ίση με $38^\circ 51' 47''$.

Να υπολογίσετε με ακρίβεια την συμπληρωματική της και την παραπληρωματική της

Προτεινόμενη λύση .

$$\begin{aligned} \text{Η συμπληρωματική της } \hat{\omega} \text{ είναι ίση με } & 90^\circ - 38^\circ 51' 47'' = \\ & 89^\circ 59' 60'' - 38^\circ 51' 47'' = \\ & 51^\circ 8' 13'' \end{aligned}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι η παραπληρωματική της ω είναι $141^\circ 8' 13''$